

INTRODUCTION AU CODAGE ET BORNES FONDAMENTALES

1 Un peu d'histoire...

La Théorie du codage date des années '50. Claude Elwood Shannon (1916-2001) et Richard Hamming (1915-1998) en sont les pionniers.

Le premier, considéré comme le père de l'ère digitale, s'est intéressé principalement aux *limites fondamentales* de communication en terme de:

- stockage de données: limite ultime de compression.
- transmission de données: limite ultime de vitesse de transmission fiable de données.

De façon complémentaire, Hamming s'est intéressé aux *algorithmes* permettant au mieux de corriger et détecter des erreurs. Le papier de Shannon *A mathematical theory of communication* (1948) et celui de Hamming *Error detecting and error correcting codes* (1950) établirent les domaines de la théorie de l'information et le domaine du codage, respectivement. A noter que Hamming considère un modèle de communication quelque peu différent de celui de Shannon.

Problème de Hamming, exemple:

- On veut stocker des bits sur un support magnétique.
- Les bits sur le support peuvent se corrompre mais très rarement (au pire 1 bit sur 63).

1.1 Une solution naïve

Une première solution naïve consiste à répéter chaque bit 3 fois. La taille du mot code est donc 3 fois plus grande que celle du message. Exemple : message \Rightarrow 0100 ; mot code \Rightarrow 000111000000.

Performances:

- Complexité de codage et décodage: linéaire en la taille du message
- Taux de codage = $\frac{\text{Taille message}}{\text{Taille mot code}} = \frac{1}{3}$

Ce codage protège d'une erreur. Pour le décodage, on utilise la règle de la majorité sur 3 bits consécutifs.

1.2 Solution 1 de Hamming

On découpe le message en blocs de 4 bits chacun.

On associe à chaque bloc m un mot code $m \cdot G$ où $m \in \{0, 1\}^4$ et

$$G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Propriété:

$\forall m_1 \neq m_2 \in \{0, 1\}^4$, $m_1 \cdot G$ et $m_2 \cdot G$ diffèrent d'au moins 3 positions.

Taux: $\frac{4}{7}$

Décodage:

Soit $y \in \{0, 1\}^7$ contenant au plus 1 erreur.

$y \cdot H$ donne l'index du bit corrompu de y avec

$$H = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

1.3 Solution 2 de Hamming

\exists deux matrices $G \in \mathcal{M}_{57,63}$ et $H \in \mathcal{M}_{63,6}$ possédant les propriétés suivantes:

- $\forall m_1 \neq m_2 \in \{0, 1\}^{57}$, $m_1 \cdot G$ et $m_2 \cdot G$ diffèrent d'au moins 3 positions;
- si y est un mot "corrompu" d'au plus 1 erreur alors $y \cdot H$ donne l'index du bit corrompu!

Taux: $\frac{57}{63} > \frac{4}{7}$. Aucun schéma qui corrige une erreur ne peut atteindre un taux supérieur à $\frac{57}{63}$, comme on le verra plus bas.

2 Notions de Hamming

2.1 Distance de Hamming

Soit Σ un alphabet de cardinalité $q < \infty$.

Soit Σ^n l'ensemble des mots de n lettres sur Σ .

On appelle distance de Hamming $\Delta(x, y)$, avec $x, y \in \Sigma^n$, le nombre de coordonnées où x et y diffèrent.

On note $\delta(x, y)$ la distance normalisée de Hamming: $\delta(x, y) \stackrel{\text{def}}{=} \frac{\Delta(x, y)}{n}$.

Fait: La distance de Hamming est une métrique.

1. $\Delta(x, y) \geq 0, \forall x, y \in \Sigma^n$, avec égalité ssi $x = y$
2. $\Delta(x, y) = \Delta(y, x)$
3. $\Delta(x, y) + \Delta(y, z) \geq \Delta(x, z)$

2.1.1 Codes

Soit $\mathcal{C} \subseteq \Sigma^n$.

1. \mathcal{C} corrige t erreurs si tout motif de au plus t erreurs peut être corrigé (par un décodage possiblement inefficace).

Formellement:

- $B(x, t) \stackrel{\text{def}}{=} \{y \in \Sigma^n : \Delta(x, y) \leq t\}$
- \mathcal{C} corrige t erreurs si $\forall x, y \in \mathcal{C}$ avec $x \neq y, B(x, t) \cap B(y, t) = \emptyset$.

2. \mathcal{C} détecte $e \geq 1$ erreurs si tout motif d'au plus t erreurs peut être détecté.

Formellement:

$$\forall x \in \mathcal{C}, B(x, e) \cap \mathcal{C} = \{x\}$$

3. On appelle distance d'un code $\Delta(\mathcal{C})$, la distance minimale qui sépare deux mots d'un code:

$$\Delta(\mathcal{C}) = \min_{x, y \in \mathcal{C}, x \neq y} \Delta(x, y)$$

Proposition 1 *Les conditions suivantes sont équivalentes:*

1. \mathcal{C} corrige t erreurs
2. \mathcal{C} détecte $2t$ erreurs
3. $\Delta(\mathcal{C}) \geq 2t + 1$

Preuve

- $3 \rightarrow 1$:
 $\Delta(\mathcal{C}) \geq 2t + 1 \Rightarrow$ Les boules $B(x, t)$ ne se recouvrent pas \Rightarrow on associe à $y \in \Sigma^n$ le décodage “plus proche voisin”

$$\Phi(y) = \arg \min_{x \in \mathcal{C}} \Delta(x, y)$$

Ce décodeur corrige bien t erreurs.

- $\neg 3 \rightarrow \neg 1$:
 $\Delta(\mathcal{C}) \leq 2t \Rightarrow \exists 2$ mots codes x_1 et $x_2 \in \mathcal{C}$ dont les boules de rayon t se recouvrent: $B(x_1, t) \cap B(x_2, t) \neq \emptyset$.
 Si y appartient à cette intersection \rightarrow problème pour décoder.

- $3 \rightarrow 2$:
 $\forall x \in \mathcal{C}, B(x, 2t) \cap \mathcal{C} = \{x\}$
 On considère le décodage:
 Si $\left| \begin{array}{l} y^n = x^n \in \mathcal{C}, \text{ on déclare } x^n. \\ y^n \in \cup_x B(x, 2t) \setminus \mathcal{C}, \text{ on déclare "erreur".} \\ y \notin \cup_x B(x, 2t), \text{ on déclare n'importe quel mot code.} \end{array} \right.$

Ce décodeur détecte bien $2t$ erreurs.

- $\neg 3 \rightarrow \neg 2$:
 $\Delta(\mathcal{C}) \leq 2t \Rightarrow 2$ mots codes appartiennent à une même boule \Rightarrow . Si y est égal à l'un de ces mots codes il n'est pas possible de savoir si y correspond à un mot code où s'il s'agit d'une version bruitée d'un mot code.

■

Proposition 2 Soit q, n des entières t.q. $q \geq 2$ et $n \geq 1$.

1. $|B_q^n(x, t)| = \sum_{i=0}^t \binom{n}{i} (q-1)^i \stackrel{\text{def}}{=} \text{Vol}_q(n, t)$

2. Si \mathcal{C} corrige t erreurs $\Rightarrow |\mathcal{C}| \leq \frac{q^n}{\text{Vol}_q(n,t)}$
3. Soit $H_q(p) \triangleq p \log_q(q-1) - p \cdot \log_q(p) - \bar{p} \cdot \log_q(\bar{p})$ alors pour $0 \leq p \leq 1 - 1/q$
 - (a) $\text{Vol}_q(n, np) \leq q^{nH_q(p)}$ pour tout np entier
 - (b) $\text{Vol}_q(n, np) \geq q^{n(H_q(p) - o(1))}$ pour n suffisamment grand

Notation 3 Dans le suite ou on a deux suites a_n et b_n exponentiellement proches, i.e., telles que

$$\log(a_n/b_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

on écrira

$$a_n \doteq b_n.$$

Par exemple, le volume en grande dimension peut s'écrire

$$\text{Vol}_q(n, np) \doteq q^{nH_q(p)}.$$

Observation 4 Pour $q = 2$, $n = 63$, $t = 1$ on a $\text{Vol}(63, 1) = 64 \Rightarrow |\mathcal{C}| \leq \frac{2^{63}}{64} = 2^{57}$
 \Rightarrow Taux $\frac{57}{63}$ optimal (Solution 2 Hamming).

Preuve (Proposition 2)

1. $\binom{n}{i}(q-1)^i$ représente le nombre de séquences de longueur n qui diffèrent d'une séquence donnée sur i coordonnées exactement.
2. Si \mathcal{C} corrige t erreurs alors pour tout $x, y \in \mathcal{C}$ on a $B_q^n(x, t) \cap B_q^n(y, t) = \emptyset$ d'où

$$q^n \geq |\cup_{x \in \mathcal{C}} B_q^n(x, t)| = |\mathcal{C}| \cdot \text{Vol}_q(n, t)$$

3. (a)

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{np} \binom{n}{i} (q-1)^i &\leq \sum_{i=0}^{np} \binom{n}{i} (q-1)^{np} \\ &= q^{nH_q(p)} \sum_{i=0}^{np} \binom{n}{i} \cdot p^{np} \cdot \bar{p}^{n\bar{p}} \\ &= q^{nH_q(p)} \sum_{i=0}^{np} \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot \bar{p}^{n-i} \cdot \left(\frac{p}{1-p}\right)^{np-i} \\ &\leq q^{nH_q(p)} \end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient du fait que $p/(1-p) \leq 1$ pour $p \leq 1 - 1/q$ et de l'identité

$$\sum_{i=0}^n \binom{n}{i} \cdot p^i \cdot \bar{p}^{n-i} = 1.$$

(b) En utilisant une version grossière de la formule de Stirling

$$k! = k^k \cdot e^{-k} \text{poly}(k)$$

où $\text{poly}(k)$ est un terme polynomiale en k (i.e., $k^\alpha \leq \text{poly}(k) \leq k^\beta$ pour certains $0 < \alpha \leq \beta$ et k suffisamment grand) on a

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{np} \binom{n}{i} (q-1)^i &\geq \binom{n}{np} (q-1)^{np} \\ &= \left(\frac{1}{p}\right)^{pn} \left(\frac{1}{\bar{p}}\right)^{\bar{p}n} (q-1)^{np} \text{poly}(n) \\ &= 2^{nH_q(p)} \text{poly}(n) \\ &\geq 2^{n(H_q(p)-o(1))} \end{aligned}$$

pour n suffisamment grand.

■

3 Bornes fondamentales sur les codes

Un code $\mathcal{C} \subseteq \Sigma^n$ sur un alphabet Σ tel que

- $q = |\Sigma|$ est la taille de l'alphabet
- $|\mathcal{C}| \geq q^k$
- $\Delta(\mathcal{C}) \geq d$.

est noté $(n, k, d)_q$. Parfois on utilise la notation (n, M, d) avec $M = q^k$. Ici, k est appelé la dimension du code.

Le but ici est la caractérisation de la région de faisabilité de $(n, k, d)_q$, c'est-à-dire, l'ensemble des triplets $(n, k, d)_q$ qui peuvent être atteint par

des codes. Bien que ce problème reste ouvert, on établira des conditions nécessaires et des conditions suffisantes pour l'existence de codes pour des paramètres donnés. En particulier, on s'intéressera aux paires (R, δ) asymptotiquement atteignable, i.e., pour lesquels il existe des suites de codes

$$\{(n, k(n), d(n))\}_{n \geq}$$

telles que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{k(n)}{n} = R$$

et

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{d(n)}{n} = \delta.$$

On note que R est une fonction non-croissante de δ .

3.1 Bornes Supérieures

Theorem 5 (Singleton) *Pour tout $q \geq 2$ on a $k+d \leq n+1$ d'où $R+\delta \leq 1$.*

Preuve

Soit $(n, k, d)_q$ un code. On définit la projection sur les $k-1$ premières composantes

$$\pi : \Sigma^n \rightarrow \Sigma^{k-1} \quad \pi(x^n) \triangleq x_1, x_2 \dots x_{k-1}.$$

Puisque $|\mathcal{C}| \geq q^k$ on a $|\mathcal{C}| > q^{k-1}$ et par le principe des niches de pigeons il existe x^n et y^n tels que $\pi(x^n) = \pi(y^n)$ et donc tels que $\Delta(x^n, y^n) \leq n - (k-1) = n - k + 1$. Par suite

$$d \leq \Delta(\mathcal{C}) \leq \Delta(x^n, y^n) \leq n - k + 1.$$

■

Theorem 6 (Hamming) *Pour tout entier $q \geq 2$ et $R, \delta \in [0, 1]$ on a*

$$R + H_q(\delta/2) \leq 1.$$

Preuve Soit $d = \lfloor \delta n \rfloor$. Pour tout $x, y \in \mathcal{C}$ on a

$$B_q^n(x, \lfloor (d-1)/2 \rfloor) \cap B_q^n(y, \lfloor (d-1)/2 \rfloor) = \emptyset$$

d'où $|\mathcal{C}| \cdot \text{Vol}_q(n, \lfloor (d-1)/2 \rfloor) \leq q^n$ et donc

$$q^k \cdot 2^{n(H_q(\frac{\delta}{2}) - o(1))} \leq q^n.$$

En fixant le rapport $R = k/n$ et en prenant la limite $n \rightarrow \infty$ le résultat suit.

■

Theorem 7 (Plotkin) *Pour tout $R, \delta \in [0, 1]$*

$$R \leq \begin{cases} 1 - \frac{\delta}{\theta} & \delta \leq \theta \\ 0 & \delta > \theta \end{cases}$$

avec $\theta \triangleq 1 - \frac{1}{q}$.

Preuve

Cas $\delta > \theta$: Soit $\Delta(\mathcal{C}) \geq d$ et $|\mathcal{C}| = q^k$. Pour montrer que $R = 0$, on va considérer la quantité auxiliaire

$$S \triangleq \sum_{x, y \in \mathcal{C}} \Delta(x, y),$$

On a clairement

$$S \triangleq \sum_{x, y \in \mathcal{C}} \Delta(x, y) \geq dq^k(q^k - 1). \quad (1)$$

Maintenant on va établir une borne inf. En combinant celle-ci avec la borne sup ci-dessus on déduira que $R = 0$.

En explicitant S on a

$$S \triangleq \sum_{x, y \in \mathcal{C}} \sum_{l=1}^n \Delta(x_l, y_l) = \sum_{l=1}^n S_l$$

où

$$S_l \triangleq \sum_{x, y \in \mathcal{C}} \Delta(x_l, y_l).$$

Notons que S_l est juste la contribution à S de la l -ème colonne de la matrice $q^k \times n$ correspondant aux q^k mots codes écrit en ligne:

$$\begin{pmatrix} x_1(1) & x_2(1) & \dots & x_n(1) \\ x_1(2) & \cdot & \cdot & x_n(2) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ x_1(q^k) & \cdot & \cdot & x_n(q^k) \end{pmatrix}$$

Calcul de S_l : Soit n_i^l le nombre de fois où l'élément i apparait dans la colonne l . Afin de calculer S_l on somme la contribution de chaque élément $i \in \Sigma$ de la colonne l . Cette contribution est le produit entre le nombre d'apparitions de i dans la colonne l et le nombre d'apparitions d'éléments différents de i dans la colonne l . Il suit que

$$S_l = \sum_{i=1}^q n_i^l (q^k - n_i^l) = \sum_{i=1}^q n_i^l (q^k) - \sum_{i=1}^q n_i^2 = q^{2k} - \sum_{i=1}^q n_i^2.$$

D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on a $\left| \sum_{i=1}^q n_i m_i \right|^2 \leq \sum_{i=1}^q |n_i|^2 \cdot \sum_{i=1}^q |m_i|^2$ et donc pour $m_i = 1$ l'inégalité devient

$$q^{2k} = \left| \sum_{i=1}^q n_i \right|^2 \leq \sum_{i=1}^q |n_i|^2 \cdot q.$$

Cette inégalité donne $S_l \leq q^{2k} - \frac{q^{2k}}{q}$ et on conclut

$$S = \sum_{l=1}^n S_l \leq n \left(q^{2k} - \frac{q^{2k}}{q} \right) = n q^{2k} \left(1 - \frac{1}{q} \right). \quad (2)$$

De (1) et (2) on déduit

$$n q^{2k} \left(1 - \frac{1}{q} \right) \geq d q^k (q^k - 1)$$

ou de manière équivalente

$$q^k \leq \frac{d}{d - \theta n} = \frac{q d}{q d - (q - 1) n} \quad (3)$$

qui implique que pour $\theta < \delta$ on a $R = 0$.

Cas $\delta \leq \theta$: On prend n' tel que $\theta n' \approx d$, plus précisément on définit $n' = \lfloor \frac{d}{\theta} - \frac{1}{q-1} \rfloor$.

On groupe les mots code qui sont les même sur les $n - n'$ premières positions et on définit les sous-codes

$$\mathcal{C}_x \triangleq \{(c_{n-n'+1}, \dots, c_n) : (c_1, c_2, \dots, c_n) \in \mathcal{C}, (c_1, c_2, \dots, c_{n-n'}) = x\}$$

En appliquant (3) au code \mathcal{C}_x en remplaçant q^k par $|\mathcal{C}_x|$ et n par n' on obtient¹

$$|\mathcal{C}_x| \leq \frac{qd}{qd - (q-1)n'} \leq qd$$

où la deuxième inégalité suit de la définition de n' qui garantit que $qd - (q-1)n' \geq 1$. On déduit que

$$|\mathcal{C}| = \sum_{x \in q^{n-n'}} |\mathcal{C}_x| \leq qd \cdot q^{n-n'} = q^{n - \frac{d}{\theta} + O(\log_q d)}$$

d'où $R \leq 1 - \frac{\delta}{\theta}$. ■

3.2 Bornes Inférieures

Theorem 8 (Gilbert-Varshamov) $R \geq 1 - H_q(\delta)$ pour $0 \leq \delta \leq 1 - 1/q$.

Preuve

Fixer $0 \leq \delta \leq 1 - 1/q$ et considérer $d = \delta n$ (n suffisamment grand).

On considère la construction suivante:

- Initialisation : $\mathcal{C} \leftarrow \emptyset$, $S = \Sigma^n =$ espace entier
- while $S \neq \emptyset$ do
 - choisir $x \in S$
 - $\mathcal{C} \leftarrow \mathcal{C} \cup \{x\}$
 - $S \leftarrow S \setminus B_q^n(x, d-1)$
- end while

¹On peut appliquer (3) car clairement $\Delta(\mathcal{C}_x) \geq d$ et notre choix de n' satisfait $\theta n' < d$.

- output \mathcal{C}

Propriétés:

- $\Delta(\mathcal{C}) \geq d$
- $|\mathcal{C}| \geq \frac{q^n}{\text{Vol}_q(n, d-1)}$

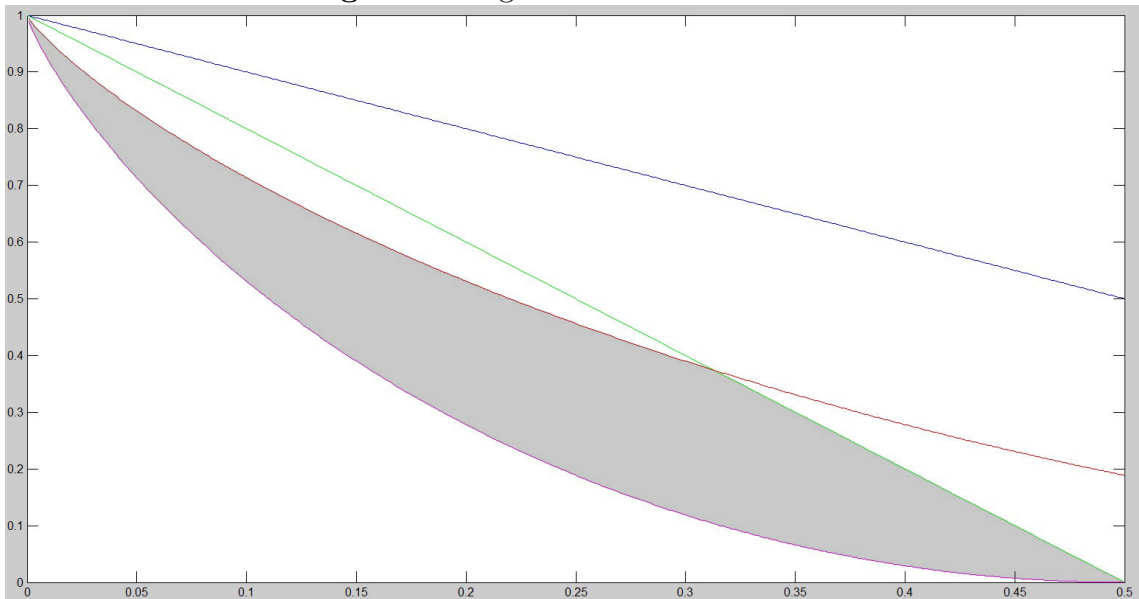
Puisque $\text{Vol}_q(n, d-1) \doteq q^{nH_q(\delta)}$ on a $R \geq 1 - H_q(\delta)$. ■

4 Comparaison pour $q = 2$

- Singleton: $R + \delta \leq 1$ (bleu)
- Hamming: $R + H(\delta/2) \leq 1$ (rouge)
- Plotkin: $R \leq \max\{1 - 2\delta, 0\}$ (vert)
- Gilbert-Varshamov: $R \geq 1 - H(\delta)$ (courbe jaune)

La frontière entre (R, δ) atteignables et non-atteignables est incluse dans la région grisée. Notons qu'il existe de meilleurs bornes, par exemple la borne supérieure d'Elias-Bassalygo est meilleure que la borne Plotkin-Hamming.

Figure 1: Région de faisabilité



Remark

- Modèle pire-des-scénarios de Hamming: on peut corriger une fraction $\frac{\delta}{2}$ d'erreurs à taux $R \geq 1 - H(\delta)$ (Gilbert-Varshamov). Par Hamming, tout code corrigeant $\leq \frac{\delta}{2}$ erreurs a un taux $R \leq 1 - H(\frac{\delta}{2})$.
- Modèle probabiliste de Shannon: on peut corriger $\frac{\delta}{2} \pm \varepsilon$ erreurs avec probabilité $1 - \varepsilon$ et taux maximal $1 - H(\frac{\delta}{2})$.