Télécom ParisTech, ACCQ202 Nom:
Novembre 2016 Prénom:
Durée: 90 minutes Points /107

Contrôle de Connaissances

Répondre *proprement* et *précisément*. Si une étape vous manque, décrivez brièvement la difficulté où l'hypothèse manquante. Détaillez vos raisonnements.

Seul de quoi écrire est autorisé. Bonne Chance!!!

1. (16pts) Soit $U_1, U_2, \ldots$ une source d'information stationaire telle que tous les U_i prennent valeur dans un alphabet fini. A noter que par stationarité $P(u_i)$ et $P(u_i|u_{i-1})$ ne dépendent pas de i. Dans ce problème on va supposer que $-\log P(u_i)$ et $-\log P(u_i|u_{i-1})$ prennent toujours des valeurs entières et ce pour tout (u_{i-1}, u_i). On va coder cette source en utilisant un code de Shannon, mais Quentin, Léa et Régis ont chacun une idée différente:

   - Quentin propose de coder symbole par symbole $U_1, U_2, \ldots$ avec un code de Shannon et de concaténer ensuite les mots codes;
   - Léa propose d'utiliser un code de Shannon pour coder en paires, d'abord (U_1, U_2), puis (U_3, U_4), etc..
   - Régis propose de coder chaque symbol étant donné le précédent avec un code de Shannon pour la probabilité conditionelle $P(u_i|u_{i-1})$. En d'autres termes, d'abord coder U_1 ensuite U_2 sachant U_1, puis U_3 sachant U_2, etc...

   On s'intéresse à la performance de ces trois codes pour coder $(U_1, U_2, \ldots, U_n)$.

   (a) (8pts) En supposant la source i.i.d. comparer la longueur moyenne (normalisée) des codes, i.e., $\frac{1}{n}\mathbb{E}L_n(C)$ pour chaque type de code C en supposant $n > 2$, n pair.

(b) (8pts) Comparer les codes en fonction de n quand la source n'est plus i.i.d. et en particulier quand U_{i-1} et U_i sont dépendants.

2. (27pts) Soit (X, Y) une paire de variables aléatoires de probabilité jointe

$X \backslash Y$	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6
y_1	1/4	1/4	1/16	1/16	1/16	1/16
y_2	1/24	1/24	1/24	1/24	1/24	1/24

(a) (5pts) Etant donné $Y = y_1$, quelle est la longueur moyenne W_1 d'un mot code de Huffman pour X?

(b) (5pts) Etant donné $Y = y_2$, quelle est la longueur moyenne W_2 d'un mot code de Huffman pour X?

(c) (7pts) Si Y est aléatoire et inconnue, quelle est la longueur moyenne W d'un mot code de Huffman pour X? Est-ce

$$W = Pr(Y = y_1)W_1 + Pr(Y = y_2)W_2 \,?$$

(d) (10pts) Est-ce que (c) est vrai en général, ou cette égalité n'est vérifiée que pour certaine probabilité jointe de (X, Y)? Autrement dit, si Y prend n valeurs (ci-dessus $n = 6$) a-t-on toujours

$$W = \sum_{i=1}^{n} Pr(Y = y_i)W_i$$

où W_i est la longueur moyenne d'un code de Huffman pour X lorsque $Y = y_i$ et où W est la longueur moyenne d'un code de Huffman pour X lorsque Y est aléatoire? Si oui justifier, si non, donner un contre-exemple simple ($n \leq 3$).

3. (10pts) Soit X, Y, Z trois variables de Bernoulli(1/2) indépendantes deux à deux, i.e., $I(X;Y) = I(X;Z) = I(Y;Z) = 0$. Sous cette contrainte donner le minimum de $H(X,Y,Z)$ et donner un exemple de (X,Y,Z) attaignant ce minimum.

4. (7pts) Soit $Q(j|i)$ la matrice de transition d'un canal donné (ici i indique la ligne de la matrice et j la colonne). Montrer que si l'on rajoute une ligne supplémentaire à la matrice le nouveau canal n'a pas une capacité plus faible.

5. (7pts) On considère une source $X \sim p$ telle que pour tout x, $p(x)$ est une puissance entière de $1/2$. Montrer que tout code de Huffman pour la source X a une longueur moyenne égale à l'entropie de X.

6. (40pts) Soit un canal additif $x + Z = Y$ où x est un signal d'entrée du canal, Y la sortie du canal, et Z le bruit du canal de densité

$$f_Z(z) = \begin{cases} \exp(-z) & z \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les mots codes $\mathbf{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_n)$ susceptibles d'être utilisés sur le canal sont tels que chaque x_i est non-négatif et tels que

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i \leq P$$

pour une certaine constante $P \geq 0$. Cette deuxième contrainte se traduit par la contrainte $E(X) \leq P$ lorsqu'on cherche à maximiser l'information mutuelle $I(X;Y)$.

(a) (5pts) La capacité de ce canal est donnée par

$$C = \max_{X: X \geq 0, E(X) \leq P} I(X;Y)\,.$$

Exprimer $I(X;Y)$ en terme d'entropie differentielle de Y et d'entropie différentielle de Z.

(b) (5pts) Quel est l'entropie différentielle de Z?

(c) (5pts) Quelles sont les contraintes sur le domaine et l'espérance d'une variable de sortie Y correspondant à une entrée X satisfaisant les contraintes d'entrées?

(d) (7pts) Montrer que parmi toutes les variables aléatoires de même espérance λ, celle qui maximise l'entropie différentielle est celle qui a la densité exponentielle

$$p(v) = e^{-v/\lambda}/\lambda\,.$$

Aide: ceci peut se montrer à l'aide d'un argument similaire à celui qu'on a vu en classe qui montre que la Gaussienne maximise l'entropie différentielle parmi toutes les variables aléatoires de même variance. Développer $D(q||p)$ où q est une densité de probabilité quelconque d'espérance λ.

(e) (2pts) Calculer l'entropie différentielle d'une variable exponentielle.

(f) (5pts) Donner l'entropie différentielle maximale pour une variable de sortie Y correspondant à une entrée X satisfaisant les contraintes d'entrées.

(g) (2pts) Montrer que la capacité C du canal satisfait

$$C \leq \ln(1 + P) \quad \text{nats}\,.$$

(h) (7pts) Montrer que si X a densité

$$f_X(x) = \begin{cases} \mu\delta(x) + (1-\mu)\mu\exp(-x\mu) & x \geq 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

alors $Y = X + Z$ est non-negative et de densité $f_Y(y) = \mu e^{-y\mu}$, $y \geq 0$ ($\delta(x)$ est la "fonction" de Dirac centrée en x). Aide: si A et B sont deux variables aléatoires indépendantes, alors leur somme a densité

$$f_C(c) = \int f_A(a) f_B(c-a) da\,.$$

(i) (2pts) Conclure que la borne supérieure obtenue en g. est en faite une égalité, et donc que

$$C = \log(1+P)\,.$$